22/05/19

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

Άσκηση 1 $A=\begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$a,b=;$

$\lambda_1=\lambda_2=0$

$\lambda_3=;$

α τρόπος: με το $\chi_A(\lambda)$ να έχει το 0 διπλή ρίζα

β' τρόπος: $\lambda_1=0 \Rightarrow \det A=0 \Rightarrow V(0)=\ker A$

θέλω $\dim V(0)=2 \Rightarrow \dim\ker A=2$

$A=\begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix}$ $\dim\ker A=2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} A = 3-\dim\ker A=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{rank} A=1 \Rightarrow$ ο A έχει μόνο μία γραμ. ανεξ. γραμμή. Η $(4,8,8)$ είναι γρ. ανεξ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ οι άλλες 2 είναι γραμ. εξαρτ. από αυτήν

$k\cdot4=8$

$k(a,4,4)=(4,8,8)$ για κάποιο k

$k=2 \Rightarrow k\cdot a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$(4,8,b)=\lambda(4,8,8)$

$\lambda=1 \Rightarrow \boxed{b=8}$, άρα $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+8+8=18 \Rightarrow \lambda_3=18$

$V(0)=\ker A=\langle(-2,1,0),(2,0,-1)\rangle$ Να γίνουν ορθοκανονικά.

$2x+4y+4z=0 \Rightarrow x+2y+2z=0 \Rightarrow x=-2y-2z$

$(-2y-2z,y,z)=y(-2,1,0)+z(-2,0,1)$

Έστω $v_1 = (-2,1,0)$

$$v_2 = (2,0,-1) - \frac{\langle(-2,1,0),(2,0,-1)\rangle}{\langle(-2,1,0),(-2,1,0)\rangle}\cdot(-2,1,0) = (2,0,-1) + \frac{4}{5}(-2,1,0) =$$

$$= \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -1\right) \to \underline{(2,4,-5)}$$

$$V(0) = \left\langle \left(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{-5}{\sqrt{45}}\right) \right\rangle$$

$$V(18): \begin{pmatrix} -16 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 4 & 8 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x+y+z=0 \\ 2x-5y+4z=0 \\ 2x+4y-5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = z.$

$$\left(\frac12, 1, 1\right) \Rightarrow V(18) = \left\langle \left(\frac13, \frac23, \frac23\right) \right\rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} -2/\sqrt5 & 2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 1/\sqrt5 & 4/\sqrt{45} & 2/3 \\ 0 & -5/\sqrt{45} & 2/3 \end{pmatrix} \qquad P^t = P^{-1} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 & 0 \\ 2/\sqrt{45} & 4/\sqrt{45} & -5/\sqrt{45} \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A^m = P\Lambda^m P^t = P\begin{pmatrix} 0^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18^m \end{pmatrix}P^t = \dots$$

Άσκηση 2: $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = 5a_1b_1 - 2(a_1b_2 + a_2b_1) + a_2b_2 = \Pi$$

- Εσωτερικό γινόμενο $\Leftrightarrow$ ισχύουν οι 4 ιδιότητες.

$$\Pi = (a_1, b_1)\, A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (5-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 5 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

Άρα $\lambda_1 = 3 - \sqrt8$ κι $\lambda_2 = 3 + \sqrt8$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow \Pi$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

$$\|(1,0)\|^2 = (1,0)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (5,-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$$

$$\|(0,1)\|^2 = (0,1)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|(-1,2)\| = (-1,2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-9,4)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 17.$$

No. Date

Ζητάω τα (x,y) ώστε $(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5x-2y,\,-2x+y)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(5x^2-2xy-2xy+y^2)=5x^2-4xy+y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ έλλειψη

Άσκηση 3 $3x^2+2xy+3y^2+4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y=4$

$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda)=(3-\lambda)^2-1=(4-\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda_1=4,\ \lambda_2=2 \Rightarrow$ έλλειψη.

$V(4)$: $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=y$

$V(4)=\langle(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle$

$V(2)$: $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=-y$

$V(2)=\langle(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle$

Άρα $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\quad (x'\,y')=(x,y)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)=(x',y')\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ (1)

$3x^2+2xy+3y^2=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x,y)P\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}P^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=$

$=4(x')^2+2(y')^2$

P: πίνακας στροφής κατά $\pi/4$.

$3x^2+2xy+3y^2+4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y=4 \overset{(1)}{\Rightarrow} 4(x')^2+2(y')^2+4\sqrt{2}\,\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}+$

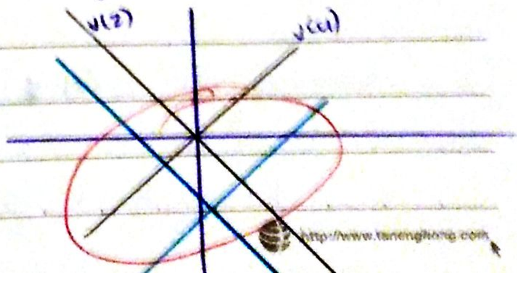
$+12\sqrt{2}\,\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}=4 \Rightarrow 4(x')^2+2(y')^2+16x'+8y'=4$ (2)

- $4(x')^2+16x'=4[(x')^2+4x'+4-4]=4(x'+2)^2-16$
- $2(y')^2+8y'=2[(y')^2+4y'+4-4]=2(y'+2)^2-16$

(2) $\Rightarrow 4(x'+2)^2+2(y'+2)^2-16-16=4$

Θέτω $X=x'+2$ κ. $Y=y'+2$ κ. έχω

$4X^2+2Y^2=36$ έλλειψη



No. Date

Άσκηση 4: $s,t \in \mathbb{R}$ $(s,t) \neq (0,0)$ $sx^2 + sy^2 - 2txy = s$

- $s = 0$ κ' $t \in \mathbb{R}^*$ $-2xty = 0 \Rightarrow xy = 0$

  $\left.\begin{array}{l} x = 0,\ y \in \mathbb{R} \\ y = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ευθεία

  $x, y = 0 \rightarrow$ λύση $(0,0)$
- $t = 0$ κ' $s \in \mathbb{R}^*$ $x^2 + y^2 = 1$ κύκλος
- $s, t \in \mathbb{R}^*$ $x^2 + y^2 - 2\frac{t}{s}xy = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & -t/s \\ -t/s & 1 \end{pmatrix}$ λ_1 λ_2

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 1 - \frac{t^2}{s^2}$

■ Αν $1 - \frac{t^2}{s^2} > 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ η καμπύλη είναι έλλειψη

■ Αν $1 - \frac{t^2}{s^2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ κ' $\lambda_2 > 0$

$0 \cdot (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 1$, $x' \in \mathbb{R} \rightarrow$ Δύο ευθείες

■ Αν $1 - \frac{t^2}{s^2} < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ κ' $\lambda_2 < 0$ με $\lambda_1 > |\lambda_2|$

$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 1 \rightarrow$ υπερβολή

No. Date

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1: $W = \langle \underset{v_1}{(2,1,3,0)}, \underset{v_2}{(1,1,2,1)} \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Να βρεθεί η προβολή του $\underset{u}{(1,0,1,0)}$ στο W.

• Υπενθύμιση: $\pi\rho o\beta_{v_1}(u) = \dfrac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1 = \dfrac{\langle (1,0,1,0),(2,1,3,0)\rangle}{4+1+9}\cdot(2,1,3,0)$

$= \dfrac{5}{14}\cdot(2,1,3,0)$

$\pi\rho o\beta_W(u)$: πρέπει πρώτα να γίνουν τα v_1, v_2 ορθογώνια

$v_1' = v_1$

$v_2' = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (1,1,2,1) - \dfrac{\langle (2,1,3,0),(1,1,2,1)\rangle}{4+1+9+0}\cdot(2,1,3,0) =$

$= (1,1,2,1) - \dfrac{9}{14}(2,1,3,0) = \left(-\dfrac{4}{14}, \dfrac{5}{14}, \dfrac{1}{14}, 1\right) \to (-4,5,1,1)$

$\pi\rho o\beta_W(u) = \pi\rho o\beta_{v_1'}(u) + \pi\rho o\beta_{v_2'}(u) =$

$= \dfrac{\langle (1,0,1,0),(2,1,3,0)\rangle}{\langle (2,1,3,0),(2,1,3,0)\rangle}\cdot(2,1,3,0) + \dfrac{\langle (1,0,1,0),(-4,5,1,1)\rangle}{\langle (-4,5,1,1),(-4,5,1,1)\rangle}(-4,5,1,1)$

Ασκηση 2: Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος:

$x+y+2z-2w=0$

$4x-2y-z-w=0$, κ' να βρεθεί ο $W^\perp$

Ο χώρος των λύσεων είναι $W = \ker A$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

κ' $\operatorname{rank} A = 2$

$w = 4x-2y-z$

$x+y+2z-2(4x-2y-z) = x+y+2z-8x+4y+2z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -7x+5y+4z=0$

$z = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{5}{4}y \Rightarrow w = 4x-2y-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{5}{4}y = \dfrac{9}{4}x - \dfrac{3}{4}y$

$W = \dim A = \langle (x, y, -\dfrac{7}{4}x - \dfrac{5}{4}y, \dfrac{9}{4}x - \dfrac{3}{4}y) \rangle =$

$= \langle (1,0,\dfrac{7}{4},\dfrac{9}{4}), (0,1,-\dfrac{5}{4},-\dfrac{3}{4}) \rangle =$

$= \langle (4,0,7), (0,4,-5,-3) \rangle$

$v_1' = v_1 = (4,0,7,9)$

$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 = (0,4,-5,-3) - \frac{(-62)}{146}(4,0,7,9) =$

$= \left(\frac{4\cdot 62}{146}, 4, \frac{-5\cdot 146+62\cdot 7}{146}, \frac{-3\cdot 146+9\cdot 62}{146}\right)$

$W = \langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2'}{\|v_2\|} \rangle$ κ' $W^{\perp} = \langle (1,1,2,-2), (4,-2,-1,-1)\rangle$

Άσκηση 3 Στον χώρο P_2 έχω το εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg\,dx$ με $f(x), g(x) \in P_2$. Δίνεται ο υπόχωρος $V = \langle 1, x^2+x+1\rangle$. Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του V κ' η προβολή του $h(x) = x^2 - 1$ στον V. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$. Να οριστεί ισομετρία από τον $\mathbb{R}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον V.

$P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ με $\dim P_2 = 3$

$V = \langle 1, x^2+x+1\rangle = \langle 1, x^2+x\rangle$ $\quad \dim V = 2 \Rightarrow \dim V^{\perp} = 1$

$f_1(x) = 1$

$f_2(x) = x^2 + x$

$f_2'(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2(x), f_1(x)\rangle}{\langle f_1(x), f_1(x)\rangle} \cdot f_1(x) = x^2 + x - \frac{\int_0^1 (x^2+x)\,dx}{\int_0^1 dx} \cdot 1 =$

$= x^2 + x - \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x^2 + x + \frac{5}{6}$

$V = \langle 1, x^2+x+\frac{5}{6}\rangle = \langle \frac{x^2+x+\frac{5}{6}}{\|x^2+x+\frac{5}{6}\|}\rangle$

$\pi\rho o\beta_V h(x) = \pi\rho o\beta_1 h(x) + \pi\rho o\beta_{g(x)} h(x) = \int_0^1 h(x) + \frac{\int_0^1 h(x) g(x)}{} g(x)$

Επειδή το πολυώνυμο x είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα 1 κ' $g(x)$ $(x \notin V)$ μπορώ να εφαρμόσω τη διαδικασία G-S:

$f_3(x) = x - \frac{\int_0^1 x\,dx}{1} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x g(x)\,dx}{1} g(x) = \ldots$

$V^{\perp} = \langle f_3(x)\rangle$

No. Date

$\phi: \mathbb{R}^2 \to V$ ισομετρία θεωρώ τις ορθοκανονικές βάσεις

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ & $V = \langle 1, g(x) \rangle$

$\phi(1,0) = 1$ & $\phi(0,1) = g(x)$

Απαιτώ $\phi(a,b) = a\phi(1,0) + b\phi(0,1)$ (την κάνω γραμμική)

Άρα $\phi(a,b) = a \cdot 1 + b g(x)$ ⟵ όχι το ίδιο

Έστω ότι βρήκα μια ορθοκανονική βάση του $P_2 = \langle 1, f(x), g(x) \rangle$

Ορίζω ισομετρία από τον P_2 στον $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

Ζητώ ισομετρία $\phi: P_2 \to \mathbb{R}_3$

Ορίζω: $\phi(1) = (1,0,0)$ $\quad \psi(1,0,0) = 1$

$\phi(f(x)) = (0,1,0)$ $\quad \psi(0,1,0) = f(x)$

$\phi(g(x)) = (0,0,1)$ $\quad \psi(0,0,1) = g(x)$

$\phi(ax^2 + bx + \gamma) = \cdots$ $\quad \psi(a,b,\gamma) = a \cdot 1 + b \cdot f(x) + \gamma g(x)$

$\underbrace{ax^2 + bx + \gamma}_{\text{γνωστοί}} = \underbrace{\kappa \cdot 1 + \lambda \cdot f(x) + \mu g(x)}_{\text{άγνωστοι}}$

Εκφράζω τα κ, λ, μ συναρτήσει των a, b, γ

κ: τόσα a, τόσα b, τόσα γ

λ: — " — " — " —

μ: — " — " — " —

Εφόσον η ϕ θα πρέπει να είναι γραμμική θα έχω:

$\phi(ax^2 + bx + \gamma) = \kappa\phi(1) + \lambda(\phi(f(x)) + \mu\phi(g(x)) =$

$= \kappa(1,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1) = (\_, \_, \_)$

είναι a, b, γ

συντεταγμένες με a, b, γ